Da in diesem System nirgends mehr g vorkommt, sind auch die Lösungen $\alpha, \overline{W}, \xi$ von g unabhängig. Wohl aber hängen jetzt diese Lösungen von ν ab; in (28) war ja $\nu = 0$ gesetzt worden. φ hängt also, wie man an (11a) erkennt, nicht von g ab, wohl aber von ν. Es ist möglich, daß auf diesem indirekten Wege eine g-Abhängigkeit in die eben berechnete Übergangswahrscheinlichkeit w hineinkommt; man müßte vor allem die Summe $S^{0,1}$ nochmals berechnen unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die β im allgemeinen von ν abhängen. — Es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, daß durch diese Korrektur ν um mehrere Zehnerpotenzen geändert wird. Deshalb wurde das recht unangenehme System (28) nicht weiter analysiert[12]. Es sei nur noch bemerkt, daß eine wesentliche Änderung von $\overline{W}$ bei Berechnung aus (28) gegenüber dem Wert (19) nicht zu erwarten ist; dies schließt man aus der Beziehung

$$\overline{W} = \sum_{\mathfrak{k}} \frac{F^* F}{(\hbar\,\omega + \xi)^2} \left[\sum_{\mathfrak{k}} \frac{F^* F}{\hbar\,\omega\,(\hbar\,\omega + \xi)^2} \right]^{-1},$$

die in (28) enthalten ist.

Möglicherweise liefert obige Theorie deshalb eine viel zu kleine Lebensdauer, weil sie wesentliche Punkte vernachlässigt hat: Elektrische Ladung und Spin der Nukleonen und Mesonen fehlen ja beim Ansatz (1) völlig. Es ist zu vermuten, daß diese neuen Freiheitsgrade zu neuen Auswahlregeln für Übergänge zwischen den Nukleon-Isobaren-Zuständen führen. Diese aber könnten u. U. einige metastabile Niveaus schaffen, welche man vielleicht als Hyperonen-Zustände deuten dürfte. Weitere Untersuchungen über diese Fragen sind im Gange.

[12] Übrigens erhält man durch Lösung von (28) nur das $\varphi(\mathfrak{k})$, welches das tiefste Minimum von W_0 liefert. Es gibt aber i. allg. noch weitere Lösungen φ desselben Variationsproblems, die ebenfalls angeregte Zustände schaffen können. Mit diesen Niveaus sollte man sich vielleicht auch einmal befassen.

Das Pol-Dipol-Teilchen im Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld

Von A. Papapetrou und W. Urich

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin und
Lehrstuhl für Theoretische Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 109—117 [1955]; eingegangen am 23. Dezember 1954)

Die Bewegungsgleichungen für ein Pol-Dipol-Teilchen unter dem Einfluß vorgegebener Gravitations- und elektromagnetischer Kräfte werden aufgestellt und im Lagrange- sowie im Hamilton-Formalismus diskutiert. Es zeigt sich, daß die vom gravitationsfreien Fall bekannten Züge der Theorie des Pol-Dipol-Teilchens im wesentlichen erhalten bleiben; dies gilt insbesondere auch für die Eigenschaften der mit den Analoga der Dirac-Matrizen γ^μ gebildeten klassischen Poisson-Klammern.

§ 1. Einleitung

Der Begriff des Pol-Dipol-Teilchens fand an zwei ganz verschiedenen Stellen Eingang in die Physik: Einmal, als es sich darum handelte, im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie der Dirac-Gleichung eine möglichst eng korrespondierende klassische Gleichung an die Seite zu stellen[1], zum anderen — im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie — bei der Untersuchung der Bewegung von Probeteilchen in einem Gravitationsfeld[2]. Entsprechend der verschiedenen Zielsetzung unterschieden sich auch die Methoden der beiden Richtungen. Im folgenden soll der Nachweis erbracht werden, daß die Gesichtspunkte und Resultate der erstgenannten Richtung verallgemeinerungsfähig sind: Sie bleiben im wesentlichen erhalten, wenn man neben dem Einfluß des elektromagnetischen Feldes noch den eines vorgegebenen Gravitationsfeldes berücksichtigt.

[1] M. Mathisson, Acta Phys. Polon. **6**, 167 [1937]; J. Lubanski, Acta Phys. Polon. **6**, 356 [1937]; H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Phys. **112**, 512; **114**, 478 [1939]; **116**, 153 [1940]; F. Bopp, Z. Naturforschg. **3a**, 564 [1948]; Z. angew. Phys. **1**, 387 [1949]; F. Bopp u. F. L. Bauer, Z. Naturforschg. **4a**, 611 [1949]. Ein ausführliches Literaturverzeichnis für das ganze Gebiet findet sich in dem Bericht von H. Hönl, Ergebn. exakt. Naturwiss. **26**, 291 [1952].

[2] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. (A) **209**, 248 [1951]; E. Corinaldesi u. A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc (A) **209**, 259 [1951].

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung der Methode, die wir zur Herleitung der Bewegungsgleichungen des Pol-Dipol-Teilchens aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie verwenden[3].

Das Teilchen wird durch einen Energie-Impuls-Tensor T^α_β beschrieben, der durch die Gleichungen des Gravitationsfeldes,

$$R^\alpha_\beta - \tfrac{1}{2}\,\delta^\alpha_\beta\,R = -\varkappa\,(T^\alpha_\beta + E^\alpha_\beta)\,,$$

definiert ist; E^α_β bezeichnet den Energie-Impuls-Tensor des Maxwellschen Feldes. Als Folge der Feldgleichungen gilt bekanntlich die Beziehung

$$(T^\mu_\alpha + E^\mu_\alpha)_{;\,\mu} = 0\,,$$

die mit

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\;T^\alpha_\mu\,g^{\mu\beta}$$

auch als

$$\mathfrak{T}^{\alpha\mu}{}_{,\,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \mathfrak{f}^\alpha = 0,\quad \mathfrak{f}^\alpha = F^{\alpha\mu}\,\mathfrak{s}_\mu \qquad (1{,}1)$$

geschrieben werden kann[4]. Hier ist $F^{\alpha\beta}$ der Maxwellsche Feldtensor und $\mathfrak{s}_\alpha$ die Strom-Ladungs-Vektordichte. (1,1) nennen wir die dynamische Gleichung, da sich aus ihr allein die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens herleiten lassen. Wir bemerken noch, daß wir im folgenden das Pol-Dipol-Teilchen als Probeteilchen sowohl in bezug auf das Gravitations- als auch auf das elektromagnetische Feld voraussetzen werden.

Wir machen die Annahme, daß $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ nur innerhalb einer engen „Weltröhre" nichtverschwindende Werte habe; später werden wir die Röhre auf die Bahnkurve $z^\alpha(s)$ des punktförmig gedachten Teilchens zusammenschrumpfen lassen.

Die Struktur des Teilchens ist durch die Eigenschaften seines Energie-Impuls-Tensors festgelegt: Wir nehmen an, daß die „Momente"

$$\int \mathfrak{T}^{\alpha\beta}\,\delta x^\gamma\,\delta x^\delta \ldots (\mathrm{d}^3x),\quad \delta x^\alpha = x^\alpha - z^\alpha(s) \qquad (1{,}2)$$

mit mindestens zwei Faktoren δx^α sämtlich verschwinden, während von den entsprechenden Integralen mit nur einem Faktor δx^α wenigstens einige von Null verschieden sein sollen. Dabei sind alle Integrale hier und im folgenden über die Hyperfläche $t = \mathrm{const}$ zu erstrecken. Damit haben wir das Teilchen als Pol-Dipol-Teilchen charakterisiert.

Wir können nun den Spintensor $S^{\alpha\beta}$ des Teilchens definieren:

$$S^{\alpha\beta} = \int (\delta x^\alpha\,\mathfrak{T}^{\beta 4} - \delta x^\beta\,\mathfrak{T}^{\alpha 4})\,(\mathrm{d}^3x)\,. \qquad (1{,}3)$$

$S^{\alpha\beta}$ wird nach dem Grenzübergang von der Weltröhre zur Bahnkurve $z^\alpha(s)$ des Teilchens eine Funktion der Zeit bzw. der durch $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}z^\mu\,\mathrm{d}z^\nu$ definierten Eigenzeit s des Teilchens.

Unser erstes Ziel ist die Aufstellung von Bewegungsgleichungen für den Spintensor $S^{\alpha\beta}$ und den Geschwindigkeitsvektor $u^\alpha(s) = \dfrac{\mathrm{d}z^\alpha(s)}{\mathrm{d}s}$. Dazu machen wir noch zwei Annahmen über die elektrische Struktur des Teilchens: $\mathfrak{s}_\alpha$ soll sich als Konvektionsstrom schreiben lassen,

$$\mathfrak{s}_\alpha = \varrho_0\,u_\alpha\,, \qquad (1{,}4)$$

und die Ruhdichte ϱ_0 soll keine Ladungsdipole oder höheren Multipole enthalten. Es sei also zwar

$$\int \varrho_0\,u^4\,(\mathrm{d}^3x) = e \neq 0\,,$$

aber

$$\int \varrho_0\,\delta x^\alpha \ldots (\mathrm{d}^3x) = 0\,. \qquad (1{,}5)$$

Mit diesen Annahmen können, wie wir im folgenden Paragraphen zeigen werden, die Bewegungsgleichungen aus der anfangs erwähnten dynamischen Gleichung hergeleitet werden.

§ 2. Die Bewegungsgleichungen

a) Die Bewegungsgleichungen für den Spintensor $S^{\alpha\beta}$

Ausgangspunkt ist die aus der dynamischen Gleichung (1,1) unmittelbar folgende Beziehung

$$(x^\alpha\,\mathfrak{T}^{\beta\mu})_{,\,\mu} = \mathfrak{T}^{\alpha\beta} - x^\alpha\,\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} - x^\alpha\,\mathfrak{f}^\beta\,, \qquad (2{,}1)$$

die wir über die Hyperfläche $t = \mathrm{const}$ integrieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int x^\alpha\,\mathfrak{T}^{\beta 4}\,(\mathrm{d}^3x) = \int (\mathfrak{T}^{\alpha\beta} - x^\alpha\,\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} - x^\alpha\,\mathfrak{f}^\beta)\,(\mathrm{d}^3x)\,.$$

Setzen wir hier überall $\delta x^\mu + z^\mu(s)$ für x^μ ein und vereinfachen die entstehende Beziehung mit Hilfe der (ebenfalls über $t = \mathrm{const}$ integrierten) dynamischen Gl. (1,1), so wird daraus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \delta x^\alpha\,\mathfrak{T}^{\beta 4}\,(\mathrm{d}^3x) + \frac{\mathrm{d}z^\alpha}{\mathrm{d}t}\int \mathfrak{T}^{\beta 4}\,(\mathrm{d}^3x) \qquad (2{,}2)$$
$$+ \int (-\mathfrak{T}^{\alpha\beta} + \delta x^\alpha\,\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \delta x^\alpha\,\mathfrak{f}^\beta)\,(\mathrm{d}^3x) = 0\,.$$

[3] Wegen einer ausführlicheren Darstellung s. Papapetrou, l. c. Gegenüber der Rechnung mit δ-Funktionen hat diese Methode den Vorzug, die physikalische Bedeutung der zugrunde gelegten Hypothesen klarer hervortreten zu lassen, ohne deshalb wesentlich umständlicher zu sein.

[4] Ein Komma bedeutet die gewöhnliche, ein Semikolon die kovariante Ableitung nach den Koordinaten x^α.

Definieren wir

$$M^{\alpha\beta} = u^4 \int \mathfrak{T}^{\alpha\beta}\,(\mathrm{d}^3x)$$

und

$$M^{\alpha\beta\gamma} = -\,u^4 \int \delta x^\alpha\, \mathfrak{T}^{\beta\gamma}\,(\mathrm{d}^3x)\,,$$

dann läßt sich (2,2) schreiben:

$$M^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{u^4} M^{\alpha\beta 4}\right) = \frac{u^\alpha}{u^4} M^{\beta 4} + \varphi^{\alpha\beta}; \qquad (2,3)$$

dabei wurde $u^4 = \frac{\mathrm{d}z^4}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ beachtet und zur Abkürzung

$$\varphi^{\alpha\beta} = u^4 \int \delta x^\alpha \,(\Gamma^\beta_{\mu\nu}\, \mathfrak{T}^{\mu\nu} + \mathfrak{f}^\beta)\,(\mathrm{d}^3x)$$

gesetzt.

Wegen $M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}$ und da nach der Definition von $S^{\alpha\beta}$

$$u^4 S^{\alpha\beta} = -\,(M^{\alpha\beta 4} - M^{\beta\alpha 4})\,,$$

folgt aus (2,3):

$$M^{\alpha\beta} - M^{\beta\alpha} = 0 = \frac{\mathrm{d}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{u^4}(u^\alpha M^{\beta 4} - u^\beta M^{\alpha 4}) + \psi^{\alpha\beta} \qquad (2,4)$$

mit $\psi^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^{\beta\alpha}$. Durch Überschieben mit u_β erhält man wegen $u_\mu u^\mu = 1$

$$\frac{1}{u^4} M^{\alpha 4} = u_\mu \frac{\mathrm{d}S^{\alpha\mu}}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{u^4} u^\alpha u_\mu M^{\mu 4} + u_\mu \psi^{\alpha\mu}\,, \qquad (2,5)$$

so daß

$$\frac{1}{u^4}(u^\alpha M^{\beta 4} - u^\beta M^{\alpha 4}) = u_\mu \left(u^\alpha \frac{\mathrm{d}S^{\beta\mu}}{\mathrm{d}s} - u^\beta \frac{\mathrm{d}S^{\alpha\mu}}{\mathrm{d}s}\right) + u_\mu (u^\alpha \psi^{\beta\mu} - u^\beta \psi^{\alpha\mu})\,.$$

Dies kann in (2,4) eingesetzt werden; es wird dann:

$$\frac{\mathrm{d}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}s} + \psi^{\alpha\beta} + u_\mu \left\{u^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}S^{\beta\mu}}{\mathrm{d}s} + \psi^{\beta\mu}\right) - u^\beta \left(\frac{\mathrm{d}S^{\alpha\mu}}{\mathrm{d}s} + \psi^{\alpha\mu}\right)\right\} = 0\,. \qquad (2,6)$$

Wir gewinnen hieraus die Bewegungsgleichungen in ihrer endgültigen Gestalt, indem wir

$$\psi^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^{\beta\alpha}$$

durch u^α und $S^{\alpha\beta}$ ausdrücken und dann die Beziehung (2,6) in explizit kovariante Form bringen.

Zunächst ist wegen des in der Einleitung erwähnten Grenzübergangs von der Weltröhre zur Weltlinie des Teilchens:

$$\begin{aligned}\varphi^{\alpha\beta} &= u^4 \int \delta x^\alpha \,(\Gamma^\beta_{\mu\nu}\, \mathfrak{T}^{\mu\nu} + F^{\beta\mu}\, \mathfrak{s}_\mu)\,(\mathrm{d}^3x)\\ &= u^4 \Gamma^\beta_{\mu\nu} \int \delta x^\alpha\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}\,(\mathrm{d}^3x) + u^4 F^{\beta\mu} \int \delta x^\alpha\, \mathfrak{s}_\mu\,(\mathrm{d}^3x)\,.\end{aligned}$$

Mit (1,4) und (1,5) folgt daraus:

$$\varphi^{\alpha\beta} = u^4 \Gamma^\beta_{\mu\nu} \int \delta x^\alpha\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}\,(\mathrm{d}^3x) = -\,\Gamma^\beta_{\mu\nu} M^{\alpha\mu\nu}\,. \qquad (2,7)$$

$M^{\alpha\beta\gamma}$ kann aber wie folgt durch u^α und $S^{\alpha\beta}$ ausgedrückt werden: Wir gehen von der zu (2,1) analogen und ebenfalls aus der dynamischen Gl. (1,1) folgenden Beziehung

$$(x^\alpha x^\beta \mathfrak{T}^{\gamma\mu})_{,\mu} = x^\alpha \mathfrak{T}^{\beta\gamma} + x^\beta \mathfrak{T}^{\alpha\gamma} - x^\alpha x^\beta \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \mathfrak{T}^{\mu\nu} - x^\alpha x^\beta \mathfrak{f}^\gamma$$

aus, integrieren über $t = \mathrm{const}$, setzen $\delta x^\mu + z^\mu(s)$ für x^μ und vereinfachen die entstehende Relation mit Hilfe von (2,2) und (1,1); es ergibt sich:

$$u^4 (M^{\alpha\beta\gamma} + M^{\beta\alpha\gamma}) = u^\alpha M^{\beta\gamma 4} + u^\beta M^{\alpha\gamma 4}. \qquad (2,8)$$

Addiert man zu dieser Gleichung die eine der durch zyklische Vertauschung von α, β und γ hervorgehenden Gleichungen und subtrahiert die andere, so findet man ($M^{\alpha\beta\gamma} = M^{\alpha\gamma\beta}$):

$$2\,u^4 M^{\alpha\beta\gamma} = u^\alpha (M^{\beta\gamma 4} + M^{\gamma\beta 4}) - u^4 u^\beta S^{\alpha\gamma} - u^4 u^\gamma S^{\alpha\beta}.$$

Zur Umformung der Klammer verwenden wir nochmals (2,8):

Mit $\gamma = 4$ ist

$$u^4 (M^{\alpha\beta 4} + M^{\beta\alpha 4}) = u^\alpha M^{\beta 44} + u^\beta M^{\alpha 44}.$$

Nun gilt aber

$$u^4 S^{\alpha 4} = -\,(M^{\alpha 44} - M^{4\alpha 4}) = -\,M^{\alpha 44}\,,$$

da

$$M^{4\alpha\beta} = -\,u^4 \int \delta x^4\, \mathfrak{T}^{\alpha\beta}\,(\mathrm{d}^3x) = 0$$

wegen $\delta x^4 = 0$ auf der Hyperfläche $t = \mathrm{const}$. Damit wird schließlich:

$$2\,M^{\alpha\beta\gamma} = -\,(S^{\alpha\beta} u^\gamma + S^{\alpha\gamma} u^\beta) + \frac{u^\alpha}{u^4}(S^{4\beta} u^\gamma + S^{4\gamma} u^\beta)\,. \qquad (2,9)$$

Jetzt kann man

$$\psi^{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} M^{\beta\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu} M^{\alpha\mu\nu}$$

in (2,6) durch u^α und $S^{\alpha\beta}$ ausdrücken und schreiben:

$$\dot{S}^{\alpha\beta} + u_\mu (u^\alpha \dot{S}^{\beta\mu} - u^\beta \dot{S}^{\alpha\mu}) = 0; \qquad (2,10)$$

der Punkt bezeichnet die kovariante Ableitung nach s:

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{D}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}S^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} S^{\mu\beta} u^\nu + \Gamma^\beta_{\mu\nu} S^{\alpha\mu} u^\nu\,.$$

Die Gl. (2,10) sind die gesuchten kovarianten Bewegungsgleichungen für den Spintensor $S^{\alpha\beta}$. Sie haben die gleiche Form wie im Falle eines reinen Gravitationsfeldes, offenbar weil wir nach (1,5) angenommen haben, daß das Teilchen in bezug auf das elektromagnetische Feld reine Polstruktur besitzt.

b) Die Bewegungsgleichungen für u^α

Ausgangspunkt ist hier die über $t = \text{const}$ integrierte dynamische Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{u^4} M^{\alpha 4}\right) + \varphi^\alpha = 0\,, \qquad (2{,}11)$$

wo wir

$$\varphi^\alpha = u^4 \int (\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \mathfrak{f}^\alpha)\,(\mathrm{d}^3x)$$

gesetzt haben. Den ersten Term von (2,11) substituieren wir aus (2,5), wobei wir für $\psi^{\alpha\beta}$ gleich den entsprechenden Ausdruck in u^α und $S^{\alpha\beta}$ setzen; es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,(m\,u^\alpha + u_\mu\,\dot{S}^{\alpha\mu}) + \varphi^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{u^4}\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,S^{\mu 4}\,u^\nu\right) = 0\,. \qquad (2{,}12)$$

Dabei ist die Invariante[5] m definiert als:

$$m = \frac{1}{u^4}\,u_\mu\,(M^{\mu 4} + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\,S^{\varkappa 4}\,u^\lambda)\,. \qquad (2{,}13)$$

Um die Bewegungsgleichungen auf ihre endgültige kovariante Form zu bringen, muß noch φ^α durch u^α und $S^{\alpha\beta}$ ausgedrückt werden. Wegen des Grenzübergangs von der Weltröhre zur Weltlinie des Teilchens und wegen (1,4) und (1,5) ist:

$$\begin{aligned}\varphi^\alpha &= u^4 \int (\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\mathfrak{T}^{\mu\nu} + F^{\alpha\mu}\,\mathfrak{s}_\mu)\,(\mathrm{d}^3x)\\ &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda}\,M^{\lambda\mu\nu} + e\,F^{\alpha\mu}\,u_\mu\,.\end{aligned}$$

(2,9), (2,3) und (2,13) ermöglichen nun die Elimination von $M^{\lambda\mu\nu}$ und $M^{\mu\nu}$; nach leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}\varphi^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{u^4}\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,S^{\mu 4}\,u^\nu\right) &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\big\{(m\,u^\mu + u_\lambda\,\dot{S}^{\mu\lambda})\,u^\nu\\ &\quad + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\,S^{\nu\varkappa}\,u^\lambda\big\} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda}\,S^{\lambda\mu}\,u^\nu + e\,F^{\alpha\mu}\,u_\mu = 0\,.\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen werden damit endgültig:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}\,(m\,u^\alpha + u_\mu\,\dot{S}^{\alpha\mu}) + \frac{1}{2}\,S^{\mu\nu}\,u^\lambda\,R^\alpha_{\nu\lambda\mu} + e\,F^{\alpha\mu}\,u_\mu = 0\,; \qquad (2{,}14)$$

$R^\alpha_{\nu\lambda\mu}$ bezeichnet den Riemannschen Krümmungstensor:

$$R^\alpha_{\nu\lambda\mu} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\varrho}\,\Gamma^\varrho_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\varrho}\,\Gamma^\varrho_{\mu\lambda}\,.$$

Der zweite, den Krümmungstensor enthaltende Term rührt von der Wechselwirkung des Spins mit dem Gravitationsfeld her.

c) Diskussion der Bewegungsgleichungen

Wir definieren die Größen p^α, G^α und F^α durch

$$p^\alpha = u_\mu\,\dot{S}^{\alpha\mu}\,, \quad G^\alpha = m\,u^\alpha + p^\alpha$$

und

$$F^\alpha = \tfrac{1}{2}\,S^{\mu\nu}\,u^\lambda\,R^\alpha_{\nu\lambda\mu} + e\,F^{\alpha\mu}\,u_\mu\,.$$

Die Bewegungsgln. (2,10) und (2,14) lauten dann:

$$\dot{S}^{\alpha\beta} + u^\alpha\,p^\beta - u^\beta\,p^\alpha = 0 \qquad (2{,}15)$$

und

$$\dot{G}^\alpha + F^\alpha = 0\,. \qquad (2{,}16)$$

F^α kann als die auf das Teilchen wirkende Kraft und G^α als sein Impuls gedeutet werden. Die sich in der Definition von G^α ausdrückende Entkopplung von Geschwindigkeit und Impuls ist für das Pol-Dipol-Teilchen charakteristisch; dagegen bleibt die Beziehung $G^\mu\,u_\mu = m$ auch hier erhalten. Es ist nämlich, wegen der Antisymmetrie von $S^{\alpha\beta}$, $p^\mu\,u_\mu = u_\mu\,u_\nu\,\dot{S}^{\mu\nu} = 0$.

Überschiebt man (2,15) bzw. (2,10) mit u_α, so erhält man Identitäten, die erkennen lassen, daß (2,15) nur drei unabhängige Gleichungen enthält. Den somit nur sieben unabhängigen Gleichungen des Systems (2,15), (2,16) stehen aber zehn das Pol-Dipol-Teilchen charakterisierende Bestimmungsgrößen gegenüber: die Invariante m, die drei unabhängigen Komponenten von u^α ($u^\mu\,u_\mu = 1\,!$) und die sechs Komponenten von $S^{\alpha\beta}$.

Damit die Anzahl der Unbekannten gleich der der zu ihrer Bestimmung zur Verfügung stehenden Gleichungen wird, müssen einschränkende Bedingungen postuliert werden. Das kann etwa durch Festlegung der p^α geschehen, indem man p^α als Funktion der $u^\alpha, \dot{u}^\alpha, \ddot{u}^\alpha, \ldots$ bestimmt, so daß $p^\mu\,u_\mu = 0$. Dann ist (2,15) von selbst erfüllt und (2,16) wird zu einer Gleichung in $m, u^\alpha, \dot{u}^\alpha, \ldots$.

Eine andere Möglichkeit ist die Festlegung von $S^{\alpha\beta}$: $S^{\alpha\beta}$ wird als Funktion von $u^\alpha, \dot{u}^\alpha, \ldots$ so gewählt, daß (2,15) identisch erfüllt ist. Wir verfolgen diese letzte Möglichkeit und stellen $S^{\alpha\beta}$ und $\dot{u}^\alpha$ durch das begleitende Vierbein $u^\alpha_{(\varrho)}$, $\varrho = 1, 2, 3, 4$ der Weltlinie $z^\alpha(s)$ dar:

$$S^{\alpha\beta} = \sigma_{(\varrho)(\sigma)}\,u^\alpha_{(\varrho)}\,u^\beta_{(\sigma)}\,; \quad \sigma_{(\varrho)(\sigma)} = -\sigma_{(\sigma)(\varrho)}\,. \qquad (2{,}17)$$

Die vier Vektoren des Vierbeins sind durch folgende Beziehungen definiert (Frenetsche Formeln):

$$u^\alpha_{(1)} = u^\alpha\,; \qquad \dot{u}^\alpha = \dot{u}^\alpha_{(1)} = \lambda_{(1)(2)}\,u^\alpha_{(2)}\,;$$
$$\dot{u}^\alpha_{(2)} = \lambda_{(1)(2)}\,u^\alpha_{(1)} + \lambda_{(2)(3)}\,u^\alpha_{(3)}\,;$$
$$\dot{u}^\alpha_{(3)} = \lambda_{(3)(2)}\,u^\alpha_{(2)} + \lambda_{(3)(4)}\,u^\alpha_{(4)}\,; \qquad \dot{u}^\alpha_{(4)} = \lambda_{(4)(3)}\,u^\alpha_{(3)}\,.$$

Dabei gilt für die Koeffizienten[6]

[5] Wegen der Invarianz von m s. Papapetrou, l. c.

[6] Das Vierbein $u^\alpha_{(\varrho)}$ ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn die sechs Koeffizienten $\lambda_{(\varrho)(\sigma)}$ von Null verschieden sind. Wir wollen im folgenden von der Weltlinie voraussetzen, daß dies auch der Fall sei.

$$\lambda^2_{(1)(2)} = -\dot u^\mu_{(1)}\, u_{\mu\,(1)}\,;\ \lambda^2_{(2)(3)} = -\dot u^\mu_{(1)}\, u_{\mu\,(1)} - \dot u^\mu_{(2)}\, u_{\mu\,(2)}\,;$$
$$\lambda^2_{(3)(4)} = \dot u^\mu_{(1)}\, u_{\mu\,(1)} + \dot u^\mu_{(2)}\, u_{\mu\,(2)} - \dot u^\mu_{(3)}\, u_{\mu\,(3)}\,;$$
$$\lambda_{(2)(1)} = \lambda_{(1)(2)}\,;\quad \lambda_{(3)(2)} = -\lambda_{(2)(3)}\,;\quad \lambda_{(4)(3)} = -\lambda_{(3)(4)}\,.$$

Setzen wir nun die Zerlegung von $S^{\alpha\beta}$ in (2,10) ein, so ergeben sich für die sechs willkürlichen Funktionen $\sigma_{(\varrho)(\sigma)}$ die Beziehungen

$$\dot\sigma_{(i)(k)} + \sigma_{(\varrho)(k)}\,\lambda_{(\varrho)(i)} - \sigma_{(\varrho)(i)}\,\lambda_{(\varrho)(k)} = 0\,;\ i,\ k,\ \neq 1.$$

Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich 3 der Funktionen $\sigma_{(\varrho)(\sigma)}$ eliminieren. $S^{\alpha\beta}$ enthält jetzt nur noch drei willkürliche Funktionen von s — $\sigma_{(1)(2)}\,(s)$, $\sigma_{(2)(3)}(s)$ und $\sigma_{(3)(4)}(s)$ — sowie die $\lambda_{(\varrho)(\sigma)}$ und $u^\alpha_{(\varrho)}$ als bekannte Funktionen der u^α und ihrer Ableitungen. Zur Bestimmung der Bewegung des Teilchens haben wir nur noch (2,16) zu berücksichtigen.

Beim Pol-Dipol-Teilchen scheint sich aber die Zahl der willkürlichen Funktionen auf nur eine reduzieren zu lassen, und zwar aus folgendem Grunde: Man wird verlangen müssen, daß (2,16) aus einem Variationsprinzip folgt und also von der Form

$$\frac{\partial L}{\partial z^i} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L}{\partial z'^i} + \frac{\mathrm d^2}{\mathrm dt^2}\frac{\partial L}{\partial z''^i} - \ldots = 0$$

ist ($z'^i = \mathrm dz^i/\mathrm dt$ usw.), wo $L = L(z^i, z'^i, z''^i, \ldots; t)$. Nun enthält die Lagrange-Funktion des einfachen Polteilchens keine höheren als die ersten Ableitungen z'^i. Beim Pol-Dipol-Teilchen wird man Ableitungen höchstens zweiter Ordnung erwarten. Der Ausdruck $\partial L/\partial z''^i$ stellt nämlich einen Massendipol dar[7], so daß Glieder wie $\partial L/\partial z'''^i$ höheren Multipolen entsprechen und daher beim Pol-Dipol-Teilchen nicht auftreten dürften. Infolgedessen werden wir annehmen, daß alle höheren Momente verschwinden, so daß

$$L = L\,(z^i, z'^i, z''^i; t)\,.$$

Da die mit diesem L folgenden Bewegungsgleichungen als höchste Ableitung $\ddot u^\alpha$ enthalten, darf $S^{\alpha\beta}$ selbst nur von u^α und $\dot u^\alpha$ abhängen.

Man erkennt, daß unter diesen Umständen $S^{\alpha\beta}$ die Gestalt

$$S^{\alpha\beta} = A\,(Q)\,(\dot u^\alpha u^\beta - \dot u^\beta u^\alpha) \qquad (2,18)$$

haben muß und nur noch die eine willkürliche Funktion

$$A\,(Q) = Q^{-1/2}\,\sigma_{(2)(1)}$$

enthalten wird, die wir als Funktion der Invarianten

$$Q = \lambda^2_{(1)(2)} = -\dot u^\mu\,\dot u_\mu$$

auffassen.

[7] Vorausgesetzt, daß in dem gewählten Koordinatensystem z^i die Dimension einer Länge hat.

§ 3. Die Lagrangeschen Gleichungen

Nach dem in § 2 Gesagten wird die Lagrange-Funktion des Pol-Dipol-Teilchens — wenn wir als Parameter die Koordinatenzeit benutzen und den elektromagnetischen Term einstweilen noch fortlassen — die Form haben:

$$L = \frac{1}{u^4}\,f\,(Q)\,. \qquad (3,1)$$

Setzen wir $v^i = z'^i$, $v^4 = 1$; $\gamma^i = z''^i$, $\gamma^4 = 0$, so sind die zugehörigen Eulerschen Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial z^i} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} + \frac{\mathrm d^2}{\mathrm dt^2}\frac{\partial L}{\partial \gamma^i} = 0\,. \qquad (3,2)$$

Diese Gleichungen sollen nun auf die Form $\dot G^\alpha + F^\alpha = 0$ gebracht und mit den feldmechanisch gewonnenen Bewegungsgleichungen (2,16) verglichen werden. Der Vergleich wird lehren, wie die in (2,18) vorkommende charakteristische Funktion $A\,(Q)$ mit $f(Q)$ zusammenhängt.

Um die in (3,2) verlangten Differentiationen ausführen zu können, ist es zunächst erforderlich, $\dot u^\alpha$ und $u^4 = \mathrm dt/\mathrm ds$ und damit auch L durch z^i, v^i, γ^i und t auszudrücken. Denken wir das Gravitationsfeld im vierdimensionalen Raum vorgegeben, so sind die $g_{\alpha\beta}$ auf der Weltlinie des Teilchens Funktionen von z^i, v^i und t. Aus $\mathrm ds^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm dz^\mu\,\mathrm dz^\nu$ oder

$$\left(\frac{\mathrm dt}{\mathrm ds}\right)^2 g_{\mu\nu}\,v^\mu\,v^\nu = 1 \qquad (3,3)$$

folgt dann sofort, daß $\mathrm dt/\mathrm ds$ nur von z^i, v^i und t abhängig ist ($v^4 = 1$!).

$\dot u^\alpha$ schreiben wir

$$\dot u^\alpha = \frac{\mathrm du^\alpha}{\mathrm ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu = \left(\frac{\mathrm dt}{\mathrm ds}\right)^2\gamma^\alpha + \frac{\mathrm d^2t}{\mathrm ds^2}\,v^\alpha + \left(\frac{\mathrm dt}{\mathrm ds}\right)^2\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,v^\mu\,v^\nu$$

und berechnen nun noch $\mathrm d^2t/\mathrm ds^2$.

Dazu differenzieren wir (3,3) nach s und erhalten:

$$\frac{\mathrm d^2t}{\mathrm ds^2} + \left(\frac{\mathrm dt}{\mathrm ds}\right)^4 (g_{\mu\nu}\,v^\mu\,\gamma^\nu + \Gamma_{\mu,\nu\varrho}\,v^\mu\,v^\nu\,v^\varrho) = 0\,,$$

wo

$$2\,\Gamma_{\mu,\nu\varrho} = g_{\mu\nu,\varrho} + g_{\mu\varrho,\nu} - g_{\nu\varrho,\mu}\,.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können nun die Eulerschen Gln. (3,2) leicht explizit hingeschrieben werden; es ergibt sich zunächst:

$$\frac{1}{2}(f-4f'Q)\,g_{\mu\nu,i}\,u^\mu u^\nu \\ -2f'\Gamma^\alpha_{\mu\nu,i}\,\dot u_\alpha u^\mu u^\nu - f' g_{\mu\nu,i}\,\dot u^\mu \dot u^\nu \\ -\frac{\mathrm d}{\mathrm d s}\Big((f-4f'Q)\,g_{i\mu}u^\mu \\ -4f'\Gamma^\alpha_{i\nu}\dot u_\alpha u^\nu + 2\frac{\mathrm d}{\mathrm d s}(f'\dot u_i)\Big)=0\,,$$

wobei wir statt der v^i, γ^i wieder u^α, $\dot u^\alpha$ geschrieben und $\mathrm d f(Q)/\mathrm d Q = f'$ gesetzt haben. Eine Reihe weiterer Umformungen bringt dies in die erwünschte Gestalt (2,16):

$$\frac{\mathrm D}{\mathrm D s}\Big((4f'Q-f)\,u_i + \frac{\mathrm D}{\mathrm D s}(-2f'\dot u_i)\Big) \\ +2f'\dot u_\alpha u^\mu u^\nu R^\alpha_{i\nu\mu}=0,\; i=1,2,3\,. \qquad (3{,}4)$$

Beim Vergleich von (3,4) mit (2,16) bzw. (2,14) ist zu beachten, daß die Gültigkeit von (3,4) vorläufig nur für $i=1,2,3$ nachgewiesen ist. Setzt man (2,18), also

$$S^{\alpha\beta}=A(Q)\,(\dot u^\alpha u^\beta - \dot u^\beta u^\alpha)$$

in (2,14) ein, so erhält man (ohne den elektromagnetischen Term):

$$\frac{\mathrm D}{\mathrm D s}\Big((m-AQ)\,u^\alpha + \frac{\mathrm D}{\mathrm D s}(A\dot u^\alpha)\Big) - A\dot u^\lambda u^\mu u^\nu R^\alpha_{\lambda\mu\nu}=0$$

oder

$$\frac{\mathrm D}{\mathrm D s}\Big((m-AQ)\,u_\alpha + \frac{\mathrm D}{\mathrm D s}(A\dot u_\alpha)\Big) - A\dot u^\lambda u^\mu u^\nu R_{\alpha\lambda\mu\nu}=0. \qquad (3{,}5)$$

Für $\alpha=1,2,3$ stimmt dies mit (3,4) überein, wenn $m-AQ=4f'Q-f$ und $A=-2f'$ erfüllt ist, also:

$$\left.\begin{aligned} A &= -2f', \\ m &= 2f'Q-f. \end{aligned}\right\} \qquad (3{,}6)$$

Um schließlich nachzuweisen, daß (3,4) auch für den Index $i=4$ gültig bleibt, überschieben wir zunächst (3,5) mit u^α und beachten dabei die Beziehungen $\dot u^\mu u_\mu = 0$ und $R_{\kappa\lambda\mu\nu}=-R_{\mu\lambda\kappa\nu}$. Es folgt

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm d s}(m-AQ) + u^\mu\frac{\mathrm D^2}{\mathrm D s^2}(A\dot u_\mu)=0\,. \qquad (3{,}7)$$

Das letzte Glied läßt sich noch umformen:

$$u^\mu\frac{\mathrm D^2}{\mathrm D s^2}(A\dot u_\mu) = \frac{\mathrm d}{\mathrm d s}\Big(u^\mu\frac{\mathrm D}{\mathrm D s}(A\dot u_\mu)\Big) - \dot u^\mu\frac{\mathrm D}{\mathrm D s}(A\dot u_\mu) \\ = 2\frac{\mathrm d}{\mathrm d s}(AQ) - \frac{1}{2}A\dot Q\,,$$

so daß wir statt (3,7) auch schreiben können:

$$\dot m + Q\dot A + \frac{1}{2}A\dot Q = 0\,. \qquad (3{,}8)$$

Wir bemerken, daß für den Übergang von (3,5) zu (3,8) — beim Prozeß des Überschiebens — alle vier Gleichungen (3,5) erforderlich sind. Umgekehrt kann man eine der vier Gleichungen (3,5) durch (3,8) ersetzen: Insbesondere folgt aus (3,8) und den ersten drei Gln. (3,5) die vierte, $\alpha=4$ entsprechende Gleichung. Andererseits zeigt (3,6), daß

$$m' = 2f''Q + f' = -A'Q - \tfrac{1}{2}A\,,$$

also (ein Strich bedeutet hier die Ableitung nach Q):

$$(m' + A'Q + \tfrac{1}{2}A)\,\dot Q = 0\,.$$

Dies ist aber wieder (3,8)! Daher gilt außer den drei Beziehungen (3,4) auch die mit dem Index $i=4$ gebildete, so daß aus der Variation der Lagrange-Funktion (3,1) tatsächlich alle vier Gleichungen (3,5) bzw. (2,14) folgen.

§ 4. Die Hamiltonschen Gleichungen

Im folgenden sollen die kanonischen Gleichungen für das Pol-Dipol-Teilchen aufgestellt werden. Wir bilden zunächst in üblicher Weise die Hamilton-Funktion

$$H = v^i P_i + \gamma^i s_i - L, \qquad (4{,}1)$$

wo

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\mathrm d}{\mathrm d t}\frac{\partial L}{\partial \gamma^i} \qquad (4{,}2)$$

den Impuls und

$$s_i = \frac{\partial L}{\partial \gamma^i} \qquad (4{,}3)$$

das Dipolmoment definiert; die P_i sind zu den z^i, die s_i zu den v^i kanonisch konjugiert.

Da es im allgemeinen möglich sein wird, die γ^i mittels (4,3) durch s_i (sowie z^i und v^i) auszudrücken[8], wird

$$H = H(z^i, P_i;\, v^i, s_i;\, t) \text{ und}$$

$$\mathrm d H = v^i\,\mathrm d P_i + \Big(P_i - \frac{\partial L}{\partial v^i}\Big)\mathrm d v^i + \gamma^i\,\mathrm d s_i \\ -\frac{\partial L}{\partial z^i}\mathrm d z^i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm d t \text{ (siehe[9])};$$

die kanonischen Gleichungen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha)\;\frac{\mathrm d P_i}{\mathrm d t} = -\frac{\partial H}{\partial z^i}\,; \qquad &(\beta)\;\frac{\mathrm d z^i}{\mathrm d t} = \frac{\partial H}{\partial P_i}\,; \\ &(\gamma)\;\frac{\mathrm d s_i}{\mathrm d t} = -\frac{\partial H}{\partial v^i}\,; \qquad &(\delta)\;\frac{\mathrm d v^i}{\mathrm d t} = \frac{\partial H}{\partial s_i}\,. \end{aligned}\right| \qquad (4{,}4)$$

[8] Siehe Anhang!

[9] Eine explizite Zeitabhängigkeit von L kann nur über die $g_{\alpha\beta}$ hereinkommen, so daß in einem statischen Gravitationsfeld mit $g_{\alpha\beta,4}=0$ auch $\partial L/\partial t = 0$ gilt.

Dabei sind die Gln. (α) die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial z^i} = \frac{\partial L}{\partial z^i}$$

führt zusammen mit der Definition (4,2) sofort auf die Lagrangeschen Gleichungen.

Legen wir wieder die Lagrange-Funktion (3,1) zugrunde, so können s_i und P_i explizit angegeben werden. Es ist

$$s_i = \frac{\partial L}{\partial \gamma^i} = -2f'\,u^4\dot{u}_i \qquad (4{,}5)$$

und, wie man nach kurzer Rechnung findet,

$$P_i = (f - 4f'\,Q)\,u_i + 2\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(f'\,\dot{u}_i) - 2f'\,\Gamma^{\mu}_{i\nu}\dot{u}_\mu u^\nu. \quad (4{,}6)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke berechnen wir schließlich die Hamilton-Funktion selbst. Für die ersten beiden Glieder ergibt sich

$$P_i\,v^i = \frac{1}{u^4}(f - 2f'\,Q) - u^4(f - 4f'\,Q) - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(2f'\,\dot{u}_4) - \frac{2}{u^4}f'\,\Gamma^{\mu}_{i\nu}u^i\dot{u}_\mu u^\nu$$

und

$$s_i\gamma^i = \frac{2}{u^4}f'\,(Q + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{u}_\lambda u^\mu u^\nu),$$

so daß

$$-H = u_4(f - 4f'\,Q) + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(2f'\,\dot{u}_\alpha) - 2f'\,\Gamma^{\mu}_{4\nu}\dot{u}_\mu u^\nu. \quad (4{,}7)$$

Wie man sieht, lassen sich (4,6) und (4,7) als vierdimensionaler Ausdruck schreiben:

$$P_\alpha = (f - 4f'\,Q)\,u_\alpha + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(2f'\,\dot{u}_\alpha) - 2f'\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\dot{u}_\mu u^\nu;\ -H = P_4. \quad (4{,}8)$$

Wegen des Christoffel-Symbols im letzten Term ist P_α sonderbarerweise kein Vierervektor.

Wie sonst folgt auch in unserem Fall aus den kanonischen Gleichungen allgemein

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

so daß in einem statischen Gravitationsfeld die Gesamtenergie $-P_4 = H$ des Teilchens konstant ist.

Es ist nicht schwierig, in den obigen Formeln die Glieder hinzuzufügen, die den Einfluß eines vorgegebenen elektromagnetischen Feldes $\Phi_\alpha(z^i, t)$ berücksichtigen. Als Lagrange-Funktion haben wir in diesem Fall

$$L = \frac{1}{u^4}f(Q) + e\,v^\alpha\,\Phi_\alpha,$$

und P_i aus (4,6) ist jetzt durch $e\Phi_i$ zu ergänzen:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \gamma^i} = (f - 4f'\,Q)\,u_i + 2\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(f'\,\dot{u}_i) - 2f'\,\Gamma^{\mu}_{i\nu}\dot{u}_\mu u^\nu + e\,\Phi_i.$$

Die Hamilton-Funktion wird damit

$$P_4 = -H = (f - 4f'\,Q)\,u_4 + 2\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}s}(f'\,\dot{u}_4) - 2f'\,\Gamma^{\mu}_{4\nu}\dot{u}_\mu u^\nu + e\,\Phi_4$$

oder, ausgedrückt in den kanonischen Variablen,

$$H = v^i(P_i - e\,\Phi_i) + \gamma^i s_i - e\,\Phi_4 - \frac{1}{u^4}f(Q),$$

wo Q als Funktion von z^i, v^i und s_i und u^4 als Funktion von z^i, v^i und t aufzufassen sind. Diese Gleichung erlaubt eine interessante Umformung: Wie wir im Anhang zeigen werden, gilt für $\gamma^i s_i$:

$$2f'\,(u^4)^3\gamma^i s_i = -s^\mu s_\mu - 2f'\,(u^4)^3\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu s_\lambda \text{ (siehe[10])}.$$

Ferner haben wir

$$-s^\mu s_\mu = 4f'^2\,(u^4)^2\,Q,$$

so daß schließlich

$$\gamma^i s_i = \frac{2}{u^4}f'\,Q - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu s_\lambda.$$

Damit erhalten wir für die Hamilton-Funktion folgenden Ausdruck:

$$H = v^i(P_i - e\,\Phi_i - \Gamma^{\lambda}_{i\nu}v^\nu s_\lambda) - e\,\Phi_4 - \Gamma^{\lambda}_{4\nu}v^\nu s_\lambda + \frac{1}{u^4}(2f'\,Q - f).$$

Es zeigt sich also, daß der Einfluß des Gravitationsfeldes formal durch die Ersetzung

$$P_i \to P_i - \Gamma^{\lambda}_{i\nu}v^\nu s_\lambda$$

und Hinzufügen von $-\Gamma^{\lambda}_{4\nu}v^\nu s_\lambda$ zu H berücksichtigt werden kann, ganz analog zu der bekannten Vorschrift $P_i \to P_i - e\,\Phi_i$ und Hinzufügen von $-e\,\Phi_4$ im elektromagnetischen Fall.

§ 5. Die Poisson-Klammern

Der Beziehung (4,8) des letzten Paragraphen können wir noch eine andere Form geben, die auch ein neues Licht auf die Bedeutung der Invarianten m werfen wird. Definieren wir nämlich zunächst die Größe g (wir schreiben auch g^5 statt g) durch[11]

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 g^2 = -s^\mu s_\mu$$

[10] Darin ist $s^\alpha = g^{\alpha\mu}s_\mu$, $s_4 = -v^i s_i$.

[11] Vgl. Bopp u. Bauer, l. c.

und mit ihrer Hilfe dann

$$g^\alpha = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\, g\, v^\alpha ,$$

wobei wir auf $v^4 = 1$ achten, so wird (4,8) nach Multiplikation mit g^4:

$$K = g^\mu \left(P_\mu - e\,\Phi_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, v^\nu\, s_\lambda\right) + m g^5 = 0 .$$

Wir untersuchen nun die mit den — offensichtlich den Diracschen Matrizen γ^α korrespondierenden — g^α gebildeten Poisson-Klammern

$$\left\{g^A, g^B\right\} = \frac{\partial g^A}{\partial P_i}\frac{\partial g^B}{\partial z^i} - \frac{\partial g^B}{\partial P_i}\frac{\partial g^A}{\partial z^i} + \frac{\partial g^A}{\partial s_i}\frac{\partial g^B}{\partial v^i} - \frac{\partial g^B}{\partial s_i}\frac{\partial g^A}{\partial v^i}\, ;\; A, B = 1, 2, \ldots, 5 .$$

Da die g^A von den P_i unabhängig sind, bleibt nur:

$$\left\{g^A, g^B\right\} = \frac{\partial g^A}{\partial s_i}\frac{\partial g^B}{\partial v^i} - \frac{\partial g^B}{\partial s_i}\frac{\partial g^A}{\partial v^i}\, ;\; A, B = 1, 2, \ldots, 5. \tag{5,1}$$

Zur Berechnung der Poisson-Klammern stellen wir einige Formeln zusammen: Wie im Anhang gezeigt wird, ist

$$s^\alpha = \left(g^{\alpha k} - v^k g^{\alpha 4}\right) s_k ,$$

so daß wir, wegen $s_4 = -v^i s_i$, für g den Ausdruck

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 g^2 = -s^\mu s_\mu = -\left(g^{ik} - 2 v^i g^{4k} + v^i v^k g^{44}\right) s_i s_k$$

finden. Damit wird

$$g\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\,\frac{\partial}{\partial s_i}\left(g\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = s^4 v^i - s^i$$

und

$$g\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\,\frac{\partial}{\partial v^i}\left(g\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = s^4 s_i .$$

Aus der angeführten Beziehung für s folgt weiter

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial s_i} = g^{\alpha i} - g^{\alpha 4} v^i ; \quad \frac{\partial s^\alpha}{\partial v^i} = -g^{\alpha 4} s_i$$

und wegen $v^\mu v_\mu = v^k v_k + v_4 = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}$:

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = -\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 v_i ; \quad \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = 0 .$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\frac{\partial g}{\partial v^i} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} g^{-1} s^4 s_i + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 g\, v_i .$$

Mit Hilfe dieser Formeln berechnet man leicht:

$$\left\{g^\alpha, g^\beta\right\} = s^\alpha v^\beta - s^\beta v^\alpha , \tag{5,2}$$

$$\left\{g^\alpha, g^5\right\} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{-1} s^\alpha , \tag{5,3}$$

$$\left\{\{g^\alpha, g^\beta\}, g^\gamma\right\} = g^\beta g^{\alpha\gamma} - g^\alpha g^{\beta\gamma} , \tag{5,4}$$

$$\left\{\{g^\alpha, g^\beta\}, g^5\right\} = 0 , \tag{5,5}$$

$$\left\{\{g^\alpha, g^5\}, g^\beta\right\} = g^{\alpha\beta} g^5 \tag{5,6}$$

und

$$\left\{\{g^\alpha, g^5\}, g^5\right\} = g^\alpha . \tag{5,7}$$

Da die $g^{\alpha\beta}$ nur von z^i und t abhängen, verschwinden alle Klammern $\left\{g^{\alpha\beta}, g^A\right\}$. Daher lassen sich sämtliche mit irgendwelchen Kombinationen der $\left\{g^A, g^B\right\} = \gamma^{AB}$ und g^A gebildeten Poisson-Klammern linear durch γ^{AB} und g^A mit $g^{\alpha\beta}$ als Koeffizienten ausdrücken. Zur Umformung kann man oft die Jacobische Identität benutzen. Als Beispiel:

$$\left\{\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\gamma\delta}\right\} = -\left\{\{\gamma^{\gamma\delta}, g^\alpha\}, g^\beta\right\} + \left\{\{\gamma^{\gamma\delta}, g^\beta\}, g^\alpha\right\}$$
$$= + g^{\alpha\gamma}\gamma^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}\gamma^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma}\gamma^{\alpha\delta} + g^{\beta\delta}\gamma^{\alpha\gamma}.$$

Anhang

Um von der Lagrange-Funktion mit den Variablen z^i, v^i, γ^i und t zu der von z^i, P_i, v^i, s_i und t abhängigen Hamilton-Funktion übergehen zu können, müssen die γ^i aus L eliminiert werden. Im folgenden wollen wir zeigen, wie dies geschehen kann.

Wir gehen aus von der Definition der s_i,

$$s_i = \frac{\partial L}{\partial \gamma^i} = -2 f'\, u^4\, \dot{u}_i ,$$

die wir vierdimensional erweitern:

$$s_\alpha = -2 f'\, u^4\, \dot{u}_\alpha . \tag{A,1}$$

Da $v^\mu \dot{u}_\mu = 0$, hat s_4 die Bedeutung

$$s_4 = -v^k s_k . \tag{A,2}$$

Damit wird

$$s^\mu s_\mu = g^{\mu\nu} s_\mu s_\nu = -4\,(f'\, u^4)^2\, Q$$

oder

$$g^{ik} s_i s_k - 2 g^{i4} s_i v^k s_k + g^{44} (v^k s_k)^2 = -4\,(f'\, u^4)^2\, Q. \tag{A,3}$$

Diese Gleichung erlaubt es im allgemeinen, Q als Funktion von z^i, v^i, s_i und t zu berechnen[12].

Um auch die γ^i durch z^i, v^i, s_i und t auszudrücken, schreiben wir s^i als

$$s^i = -2 f'\, u^4\, \dot{u}^i = -2 f'\, u^4 \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu\right)$$
$$= -2 f'\, (u^4)^3 \left(\gamma^i + v^i \frac{1}{u^4}\frac{du^4}{dt} + \Gamma^i_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu\right)$$

und setzen für du^4/dt den durch Differentiation von $(u^4)^2\, g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu = 1$ entstehenden Ausdruck

$$\frac{du^4}{dt} = -(u^4)^3 \left(g_{\mu\nu}\, v^\mu\, \gamma^\nu + \Gamma_{\mu,\nu\varrho}\, v^\mu\, v^\nu\, v^\varrho\right) \tag{A,4}$$

ein. Wir erhalten:

[12] Nur wenn die rechte Seite von Q unabhängig wird, ist dies nicht möglich. $f(Q)$ hat dann die Form $f(Q) = a\sqrt{Q} + b$ (a und b Konstante); dieser Fall erfordert eine besondere Diskussion.

$$2\,f'\,(u^4)^3\,\gamma^i = -s^i + 2\,f'\,(u^4)^3\,\{(u^4)^2\,v^i\,(v_k\,\gamma^k + \Gamma_{\mu,\nu\varrho}\,v^\mu\,v^\nu\,v^\varrho) - \Gamma^i_{\mu\nu}\,v^\mu\,v^\nu\}\,. \quad (\mathrm{A},5)$$

Die γ^k auf der rechten Seite können eliminiert werden, indem man (A, 5) skalar mit v_i multipliziert und $1-(u^4)^2\,v^i\,v_i = (u^4)^2\,v_4$ benutzt; es wird dann:

$$2\,f'\,(u^4)^5\,v_k\,\gamma^k = -\frac{1}{v_4}\,v_i\,s^i + 2\,f'\,(u^4)^3\,\frac{1}{v_4}\,((u^4)^2\,\Gamma_{\mu,\nu\varrho}\,v_i\,v^i\,v^\varrho - \Gamma^i_{\mu\nu}\,v_i)\,v^\mu\,v^\nu\,.$$

Dies in (A, 5) eingesetzt ergibt schließlich:

$$2\,f'\,(u^4)^3\,\gamma^i = -s^i + v^i\,s^4 + 2\,f'\,(u^4)^3\,(v^i\,\Gamma^4_{\mu\nu} - \Gamma^i_{\mu\nu})\,v^\mu\,v^\nu$$

(siehe[13]), wobei wir $v^\mu\,s_\mu = 0$ benutzt haben. Endlich ersetzen wir noch s^i durch s_k: Wegen $s^\alpha = g^{\alpha\mu}\,s_\mu$ und $s_4 = -v^i\,s_i$ ist

$$s^\alpha = (g^{\alpha k} - v^k\,g^{\alpha 4})\,s_k \quad (\mathrm{A},6)$$

und damit

$$2\,f'\,(u^4)^3\,\gamma^i = (-g^{ik} + v^k\,g^{i4} + v^i\,g^{k4} - v^i\,v^k\,g^{44})\,s_k + 2\,f'\,(u^4)^3\,(v^i\,\Gamma^4_{\mu\nu} - \Gamma^i_{\mu\nu})\,v^\mu\,v^\nu\,. \quad (\mathrm{A},7)$$

Durch (A, 7) haben wir γ^i als Funktion von z^i, v^i, s_i und t dargestellt.

[13] Durch Multiplikation dieser Beziehung mit s_i entsteht die in § 4 angeführte Gleichung für $2\,f'\,(u^4)^3\,\gamma^i\,s_i$.

Die Wechselwirkung vieler Teilchen

I. Allgemeine Theorie

Von Hermann Kümmel

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforschg. **10a**, 117—125 [1955]; eingegangen am 10. Januar 1955)

Es wird die Bethe-Salpeter-Gleichung für N gleiche Teilchen abgeleitet. Die Lösungstheorie wird hinsichtlich der bei vielen Teilchen vorliegenden spezifischen Probleme diskutiert. Bei Beschränkung auf nichtrelativistische Teilchen und die niedrigste Näherung geht die Bethe-Salpeter-Gleichung in die Hartree-Fockschen Gleichungen über. Die Beziehungen zur verallgemeinerten „self-consistent-field-Methode" von Kinoshita und Nambu werden untersucht und eine einfache Begründung derselben angegeben.

Die Beschreibung der Wechselwirkung vieler Teilchen ist in jüngerer Zeit mehrfach mit modernen Methoden erneut in Angriff genommen worden[1, 2]. Man kann aber nicht sagen, daß eine restlos befriedigende Beseitigung der Schwierigkeiten gelungen ist, die daher rühren, daß zwar — vielleicht — die Wechselwirkung nur zweier Teilchen als klein angesehen werden kann, daß jedoch bei sehr vielen fast jede Näherungsannahme bedenklich ist. Die vorliegende Arbeit kann an diesem Tatbestand nur insofern etwas ändern, als sie eine einfache Formulierung des *Problems* gibt, jedoch zur *Lösung* nur Vorschläge macht.

Die besonderen Verhältnisse bei dem betrachteten Problem sind durch folgende drei Punkte zu charakterisieren:

1. Infolge der Wechselwirkung mit vielen Teilchen zu allen Zeiten verliert der Begriff des „freien Teilchens" vollkommen seinen Sinn. Das drückt sich mathematisch darin aus, daß Wellenfunktionen freier Teilchen nicht als Näherung der vollständigen Funktion angesehen werden dürfen.

2. Es können Bindungszustände zwischen zwei oder mehr Teilchen auftreten. Dies wirkt sich ebenso aus wie Punkt 1.

3. Selbst bei kleiner Kopplungskonstanten g wird es nicht möglich sein, diese zur Grundlage einer Entwicklung (Iteration) zu machen; denn dies würde etwa bedeuten, daß man nach Ng (mit N = Zahl der Teilchen) entwickelt, einer Zahl, die i. a. nicht klein sein wird.

Man kann nun die Schwierigkeiten zu umgehen versuchen, indem man durch eine geeignete kanonische Transformation (Bohm und Pines[1]) neue Variable einführt, deren einer Teil die kollektive Bewegung, deren anderer die individuelle Bewegung einzelner Teilchen (d. h. die Abweichungen von dem durch die kollektive Bewegung charakterisierten mittleren Verhalten) beschreibt. Bei Kräften, die bei geringen Entfernungen sehr groß werden, versagt diese Methode bekanntlich.

Neuerdings haben Kinoshita und Nambu einen anderen Weg eingeschlagen: Um bei der störungstheoretischen Entwicklung möglichst kleine

[1] D. Bohm u. D. Pines, Phys. Rev. **85**, 338 [1952]; **92**, 609 [1953].

[2] T. Kinoshita u. Y. Nambu, Phys. Rev. **94**, 598 [1954].